المتتـــاليـــات العـددية

Suites numériques

1تـمهيـــد :

I- المتـتــاليــة المحــدودة Suite bornée

1- المتتالية المكبورة Suite majorée

نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ **مكبورة** ، إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي M حيث :

$$\forall n\in I \qquad u_n \le M$$

المتتالية المصغورة Suite minorée

نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ **مصغورة** ، إذا وفقط إذا وجد m حيث :

$$\forall n\in I \qquad m\le u_n$$

2- المتتالية المحــدودة :

نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ **محــدودة** ، إذا وفقط إذا كانت مكبـورة ومصغورة.

II- المتـتــاليــة الـرتيـبـة Suite monotone

تعـاريـف :

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\ge n_0}$

- نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\ge n_0}$ تزايـدية **قطعا** إذا وفقط إذا كان :

$$\forall n\ge n_0 \quad ; \quad u_{n+1} \succeq u_n$$

- نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\ge n_0}$ تـناقصية **قطعا** إذا وفقط إذا كان :

$$\forall n\ge n_0 \quad ; \quad u_{n+1} \preceq u_n$$

- نقول أن المتتالية $(u_n)_{n\ge n_0}$ **رتيبــة** إذا وفقط إذا كانت تزايدية أو تناقصية.

حـالات خاصـة :

a- لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D و $(I\in D)$.

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ المعرفة بـ : $\forall n\in I \;;\; u_n = f(n)$

لدينا : $\forall n\in I \;;\; u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(n)$

إذا كانت f تزايـدية **قطعا** فإن $(u_n)_{n\in I}$ تزايـدية **قطعا**.

إذا كانت f تناقصـية **قطعا** فإن $(u_n)_{n\in I}$ تناقصـية **قطعا**.

مـثــال :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 5}$$

أدرس رتابة المتتالية (u_n).

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 5}$$

لدينا : $f'(x) = \frac{18x}{(x^2 + 5)^2}$

إذن : $f'(x) \succ 0 \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^{*+}$

ومنه : f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$.

وبالتالية : المتتالية (u_n) تزايدية قطعا.

b-لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية موجبة قطعا.

(يعني أن : $(u_n \succ 0) \quad (\forall n \in I$)

- إذا كان لكل n من I : $1 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}$

فإن $(u_n)_{n\in I}$ تزايدية.

- إذا كان لكل n من I : $0 \prec \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

فإن $(u_n)_{n\in I}$ تناقصية.

مثــال :

$$3 \leq n \; ; \qquad u_n = \frac{2^n}{n^2}$$

بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 3}$ تزايدية.

- **(طريقة 1)**

لدينا : $\frac{\frac{2^{(n+1)}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$

$$\Leftrightarrow \quad n \geq \sqrt{2} + 1$$

وبما أن : $n \geq 3$

فإن : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \quad ; \quad \forall n \geq 3$

ومنه : $(u_n)_{n\geq 3}$ متتالية تزايدية.

- (طريقة 2)

$$n \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow \frac{4}{3} \geq 1 + \frac{1}{n}$$
$$\Rightarrow \frac{3}{4} \leq \frac{n}{n+1}$$
$$\Rightarrow \frac{9}{16} \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$
$$\Rightarrow \frac{18}{16} \leq 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$
$$\Rightarrow 1 \leq 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

ومنه : $1 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}$

وبالتالي $(u_n)_{n\geq 3}$ تزايدية.

c-تقنية البرهان بالترجع.

حالة خاصة :	$u_{n+1} = f(u_n)$

مثال :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 16 \\ \forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$$

بين أن : (u_n) تناقصية.

الجواب :

لنبين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_{n+1} \leq u_n$

- من أجل : $n = 0$ ، $u_1 = 4$ و $u_0 = 16$

إذن : $u_1 \leq u_0$

نفترض أن : $u_{n+1} \leq u_n$

- لنبين أن : $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

لدينا : $u_{n+1} \leq u_n$

إذن : $\sqrt{u_{n+1}} \leq \sqrt{u_n}$

إذن : $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

- الاستنتاج : $u_{n+1} \leq u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

ومنه : (u_n) تناقصية.

تطبيق :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) بين أن : لكل n من $\mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq 3$

2) أدرس رتابة (u_n).

تمرين تطبيقي :

لتكن المتتالية العددية المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \ ; \ u_{n+1} = u_n (1 + u_n) \end{cases}$$

1- أحسب u_1 و u_2.

2- بين أن المتتالية (u_n) تزايدية.

ثم استنتج أن $u_n \geq 1 \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}$

3- بين أن : $u_n^2 \geq u_1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

ثم أن : $u_{n+1} \geq 2\,u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

4- واستنتج أن : $u_n \geq 2^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

الجواب :

III- المتتاليات الحسابية ، المتتاليات الهندسية :

1- المتتاليات الحسابية :

a- تعريف :

تكون المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ حسابية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي r ، بحيث : $u_{n+1} - u_n = r \qquad \forall n \geq n_0$

العدد r يسمى أساس المتتالية الحسابية $(u_n)_{n \geq n_0}$

خاصية مميزة :

u_n متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان : $u_n = \dfrac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} \qquad \forall n \geq 1$

b- صيغة الحد العام لمتتالية حسابية :

خاصيــة :

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

فإن : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \quad u_n = u_0 + n\,r$

خاصيــة :

إذا كانت a ، b و c ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية ،

فإن : $a + c = 2\,b$

c- مجمـوع حـدود متتـابعـة لمتتـاليـة حسـابيـة :

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

المجموع S حيث :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

عدد الحدود   الحد الأول   الحد الأخير

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n+1)\,\frac{u_0 + u_n}{2}$$

بنفس الطريقة نحصل على :

- $u_1 + u_2 + \dots + u_n = n\,\dfrac{u_1 + u_n}{2}$
- $u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = n\,\dfrac{u_0 + u_{n-1}}{2}$

تـطبيــق 1 :

أحسب u_0 وأساس المتتالية الحسابية (u_n) إذا علمت أن :

$$\begin{cases} u_4 + u_6 = 6 \\ u_8 + u_{10} + u_{12} + u_{14} = 228 \end{cases}$$

تـطبيــق 2 :

$(u_n)_{n\succ 0}$ متتالية حسابيــة.

$$S_n = u_1 + \dots\dots\dots + u_n$$

أحسب n و S_n إذا كانت $u_1 = 23$ و $u_n = 5$ و $r = -2$

2- المتتـاليـات الهنـدسيـة :

تـعريــف :

تكون المتتالية $(u_n)_{n \ge n_0}$ هنـدسيـــة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q ،

حيث : $u_{n+1} = q\,u_n \qquad \forall n \ge n_0$

- العدد q يسمى أساس المتتالية الهندسية $(u_n)_{n\geq n_0}$.
- العدد q غير مرتبط بـ n.
- العدد q غير منعدم.

خاصيـة مميـزة :

تكون $(v_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسيـة إذا وفقط إذا كـان :

$$v_{n+1} \cdot v_{n-1} = v_n^2 \qquad \forall n \succ n_0$$

3-2 : صيغة الحـد العام لمتتاليـة هندسيـة :

خاصيـة :

إذا كانت (v_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول v_0 ،
فإن :

$$v_n = v_0 \cdot q^n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

لدينا : $v_n = v_0 \cdot q^n$

إذن : $v_n = v_0 \cdot q \cdot q^{n-1}$

إذن : $v_n = v_1 \cdot q^{n-1}$

ولدينا : $v_n = v_1 \cdot q \cdot q^{n-2}$

إذن : $v_n = v_2 \cdot q^{n-2}$

بصفـة عامـــة :

$$v_n = v_k \cdot q^{n-k}$$

4-2 : مجمـوع حـدود متتـابعـة لمتتـاليـة هنـدسيـة :

لتكن (v_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول v_1.

لنحسب المجموع $S = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + v_n$

إذن :

$$X = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

ومنه :

$$1 + q + q^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

إذن :

$$S = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots\dots\dots\dots + v_n = v_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots\dots\dots\dots + v_n = v_1 \cdot \frac{1 - q^{n}}{1 - q}$$

$$v_0 + v_1 + \dots\dots\dots\dots + v_{n-1} = v_0 \cdot \frac{1 - q^{n}}{1 - q}$$

تمـريـن تطبيقــي :

$n \prec m$

1) أحسب المجموع : $S_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^m}$

2) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\succ 0}$ بحيث حدودها العشرة الأولى هــي حدود متتالية حسابية أساسها r.

وابتداءا من u_{10} تصبح الحدود حدود متتالية هندسية أساسها q علما أن :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{16} = \frac{-1}{27} \\ r\,q = 1 \end{cases}$$

a) أحسب q و r و u_{10} و u_{11}.

b) أحسب : $S_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$

في كل من الحالتين :

* $n \le 10$
* $n \succ 10$

2 نهـايــات المـتـتـاليــــات :

1-تـمهـيــد :

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ المعرفة بـ $u_n = f(n) \qquad \forall n \in I$

حيث f دالة عدديــة.

- إذا كانت I منتهية فلا معنــى لحساب النهاية.
- إذا كانت I غير منتهية فهنا يمكن حساب نهاية (u_n) عندما تؤول إلى $+\infty$.

ولدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f(n)$

مثال :

أحسب نهاية المتتالية إذا كانت المتتاليــة :

$$u_n = \sqrt[3]{n+1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[3]{n+1} = +\infty$$

2-نـهـايـــة (q^n) :

نـــاقش حسب قيم العدد الحقيقي q نـهاية q^n .

الحالـة ①: $1 \prec q$

نضع : $(\alpha \succ 0) \ / \ q = 1 + \alpha$

لدينا : $q^n = (1+\alpha)^n$

بين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N} \ ; \quad (1+\alpha)^n \geq 1 + n\,\alpha$

من أجـل : $n = 0$

لدينا : $(1+\alpha)^0 = 1 \quad ; \quad 1 + 0\,\alpha = 1$

إذن : $(1+\alpha)^0 \geq 1 + 0\,\alpha$

من أجـل : $n = 1$

لدينا : $(1+\alpha)^1 = 1 + \alpha$

إذن : $(1+\alpha)^1 \geq 1 + \alpha$

من أجـل : $n = 2$

لدينا : $(1+\alpha)^2 = 1 + 2\,\alpha + \alpha^2$

إذن : $(1+\alpha)^2 \geq 1 + 2\,\alpha$

نفترض أن : $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\,\alpha$

ونبين أن : $(1+\alpha)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\,\alpha$

لدينا : $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\,\alpha$

إذن : $(1+\alpha)^{n+1} \geq (1+\alpha)(1+n\,\alpha)$

إذن : $(1+\alpha)^{n+1} \geq 1 + n\,\alpha + \alpha + n\,\alpha^2$

إذن : $(1+\alpha)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\alpha + n\,\alpha$

ومنه : $(1+\alpha)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\alpha$

وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ (1+\alpha)^n \geq 1 + n\,\alpha$

ولدينا : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + n\,\alpha = +\infty$

إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + \alpha)^n = +\infty$

ومنه : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

الحالة ②: $q = 1$

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \lim_{n \to +\infty} 1^n = 1$$

الحالة ③: $0 \prec q \prec 1$

لدينا : $1 \prec \dfrac{1}{q}$

إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{q}\right)^n = +\infty$

إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{q^n} = +\infty$

ومنه : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

الحالة ④: $q = 0$

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$$

الحالة ⑤: $-1 \prec q \prec 0$

لدينا : $\lim\limits_{n \to +\infty} (-q)^n = 0$

إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} (-1)^n\, q^n = 0$

إذن : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

الحالة ⑥: $q \leq -1$

نهاية q^n غير موجـودة.

خلاصـــة :

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & 1 \prec q \\ 1 & 1 = q \\ 0 & -1 \prec q \prec 1 \\ \text{غير موجودة} & q \leq -1 \end{cases}$$

تطبيقـــات :

أحسب نهاية (u_n) في الحالات التالية :

(1 $u_n = \left(\dfrac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}\right)^n$

لدينا : $1 - \sqrt{2} \prec 1 + \sqrt{2}$

إذن : $\dfrac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \prec 1$

لدينا : $\dfrac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} + 1 = \dfrac{1 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$

$$= \frac{2}{1 + \sqrt{2}} \succ 0$$

إذن : $\dfrac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \succ -1$

ومنه : $-1 \prec \dfrac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \prec +1$

وبالتالي : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

(2 $u_n = \dfrac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}$$

$$= \frac{1}{-1} = -1$$

مصاديق تقارب متتالية
Critère de convergence d'une suite.

نعتبر المتتاليات : $(u_n)_{n \geq n_0}$ ، $(v_n)_{n \geq n_0}$ و $(w_n)_{n \geq n_0}$.

(1 إذا وجد عدد صحيح طبيعي N حيث : $\forall n \succ N$

$$u_n \prec v_n \prec w_n$$

و : $\lim u_n = \lim w_n = l$

فإن : $\lim v_n = l$

(2 إذا وجد عدد صحيح طبيعي N حيث :

$\forall n \succ N \quad u_n \prec v_n$

و : $\lim u_n = +\infty$

فإن : $\lim v_n = +\infty$

3) $u_n \prec v_n \qquad \forall n \succ N$

و : $\lim v_n = -\infty$

فإن : $\lim u_n = -\infty$

4) إذا وجد N من $\mathbb{N}$ حيث :

$$|u_n| \prec v_n \qquad \forall n \succ N$$

و : $\lim v_n = 0$

فإن : $\lim u_n = 0$

5) إذا وجد N من $\mathbb{N}$ حيث :

$$|u_n - l| \prec v_n \qquad \forall n \succ N$$

و : $\lim v_n = 0$

فإن : $\lim u_n = l$

6) إذا وجد N من $\mathbb{N}$ حيث :

$$|u_n - l| \prec \frac{k}{n} \qquad \forall n \succ N$$

فإن : $\lim u_n = l$

تعريف :

نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة إذا وفقط إذا كانت لها نهاية منتهية ونقول أنها متباعدة إذا كانت غير متقاربة.

خاصيات :

إذا كانت $\lim v_n = l'$ و $\lim u_n = l$

فإن : $\lim u_n + v_n = l + l'$

$$\lim u_n \cdot v_n = l \cdot l'$$

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{l}{l'} \quad (l' \neq 0)$$

مبرهنة :

كل متتالية متقاربة وموجبة تكون نهايتها موجبة.

مبرهنة :

إذا كان لك $N \prec n$ ، $u_n \prec v_n$

و $\lim v_n = l'$ و $\lim u_n = l$

فإن : $l \prec l'$

مبرهنـة :

كل متتالية تزايدية ومكبورة هــي متتالية متقاربة.
كل متتالية تناقصية ومصغورة هي متتالية متقاربة.

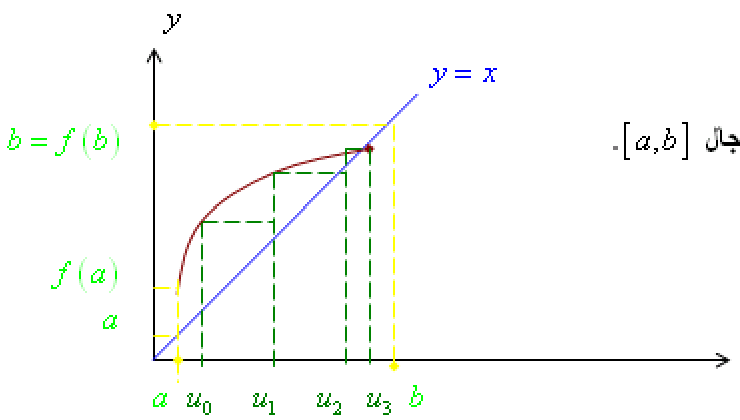
استنتـــاج :

- كل متتالية موجبة وتناقصية هــي متتالية متقاربة.
- كل متتالية سالبة وتزايدية هي متتالية متقاربة.

متتاليـات من نـوع : $u_{n+1} = f(u_n)$

مثـال ① :

ليكن (ℓ_f) المنحنى الممثل للدالة f على المجال $[a,b]$.



لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 \in [a\ ,\ b] \\ \forall n \in \mathbb{N}\ ;\quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

نلاحظ أن : $\forall\, x \in [a\ ,\ b] \quad ; \quad f(x) \in [a\ ,\ b]$

يعني أن : $f([a\ ,\ b]) \subset [a\ ,\ b]$

وبما أن : (ℓ_f) يوجد فوق المنصف.

فإن : $\forall x \in [a\ ,\ b] \quad ; \quad f(x) \geq x$

لنبين بالترجع أن (u_n) مكبورة.

- من أجل $n = 0$: $a \leq u_0 \leq b$

نفترض أن : $a \leq u_n \leq b$

ونبين أن : $a \leq u_{n+1} \leq b$

نعلم أن لكل x من $[a,b]$ ، $f(x) \in [a\ ,\ b]$

وبما أن : $a \leq u_0 \leq b$

فإن : $a \leq f(u_n) \leq b$ إذن : $a \leq u_{n+1} \leq b$

ومنه : $a \leq u_n \leq b$; $\forall n \in \mathbb{N}$ ①

ولنبين أن : (u_n) تزايديـة.

لدينا : $f(x) \geq x \qquad \forall x \in [a,b]$

و : $a \leq u_n \leq b \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

إذن : $f(u_n) \geq u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

إذن : $u_{n+1} \geq u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

وبالتالي : (u_n) تزايديـة ②.

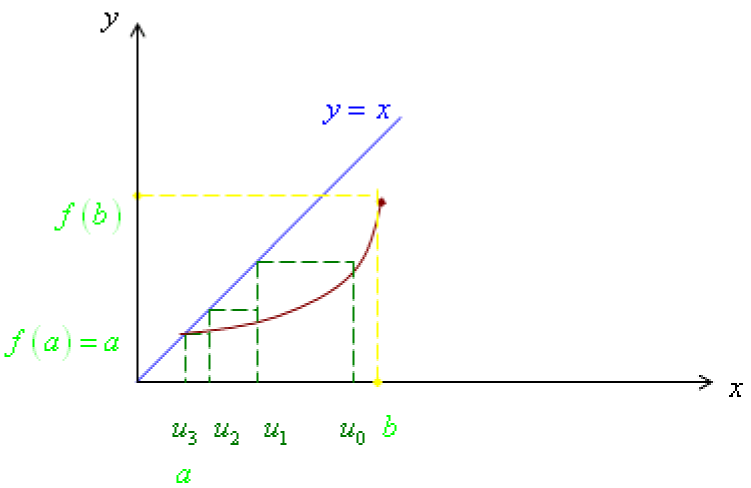
ومن ① و ② نستنتج أن : (u_n) متقاربـة.

إذن لـهـا نـهاية منتهية l حيث $l = f(l)$

ومنه نـهايـة (u_n) هـي حـل المعادلـة :

$$a \leq x \leq b \; ; \qquad f(x) = x$$

مثـال ②:



لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 \in [a\,,\,b] \\ \forall n \in \mathbb{N} \; ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

لدينا : $\forall\, x \in [a\,,\,b] \quad ; \quad f(x) \in [a\,,\,b]$

يعني أن : $a \leq x \leq b \quad \Rightarrow \quad a \leq f(x) \leq b$

ولدينا : $\forall x \in [a\,,\,b] \quad ; \quad f(x) \leq x$

لنبين بالترجع أن : (u_n) مصغـورة.

- من أجل $n = 0$ $\qquad a \leq u_0 \leq b$

نفترض أن : $a \leq u_n \leq b$

ونبين أن : $a \leq u_{n+1} \leq b$

نعلم أن لكل x من $[a,b]$ ، $f(x) \in [a\ ,\ b]$

وبما أن : $a \le u_0 \le b$

فإن : $a \le f(u_n) \le b$

إذن : $a \le u_{n+1} \le b$

ومنه : $a \le u_n \le b$; $\forall n \in \mathbb{N}$ ①

لنبين أن : (u_n) تناقصية.

لدينا : $f(x) \le x$ $\forall x \in [a,b]$

و : $a \le u_n \le b$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$f(u_n) \le u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

إذن : $u_{n+1} \le u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

وبالتالي : (u_n) تناقصية ②.

ومن ① و ② نستنتج أن : (u_n) متقاربة.

إذن لها نهاية منتهية l حيث $l = f(l)$

ومنه نهاية (u_n) هي حل المعادلة :

$$f(x) = x \quad ; \quad a \le x \le b$$

خلاصة وخاصية :

إذا كانت (u_n) متتالية معرفة بالعلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$ و f متصلة على مجال I مع : $f(I) \subset I$ و $u_0 \in I$ إذا كانت (u_n) متقاربة. فإن نهايتها هي حل المعادلة $f(x) = x$ ، $x \in I$

مثال :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \ ; \ u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + 1 \end{cases}$$

1) مثل مبيانيا الدالة المعرفة بـ :

$$f(x) = \frac{1}{2} x + 1$$

2) بين أن : $f(x) \in [0\ ,\ 2]$ ، $\forall x \in [0\ ,\ 2]$

3) بين أن : $f(x) \ge x$ ، $\forall x \in [0\ ,\ 2]$

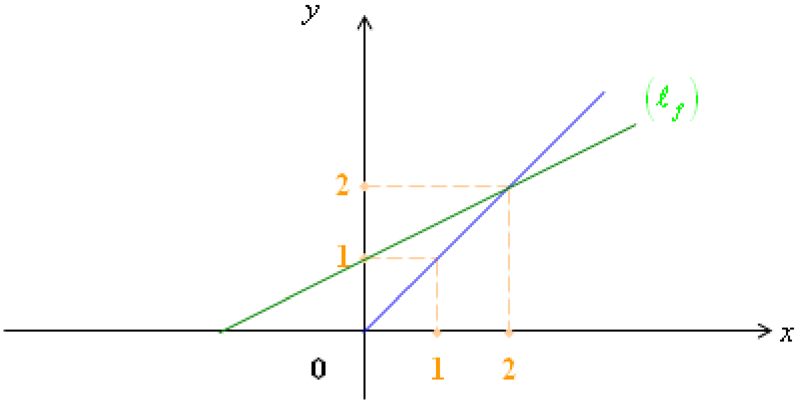
4) بين أن : (u_n) مكبورة.

5) بين أن : (u_n) تزايدية.

6) استنتج نـهاية (u_n).

الجـــواب :

1)



1) بما أن f متصلة وتزايديـة على $[0,2]$.

فإن : $f([0,2]) = [1,2] \subset [0,2]$

ومنه : $f(x) \in [0\,,\,2]$ ، $\forall x \in [0\,,\,2]$

2) لنبين : $f(x) \geq x$ ، $\forall x \in [0\,,\,2]$

على المجال $[0,2]$ ، ℓ_f يوجد فوق المنصف.

ومنه : $f(x) \geq x$ ، $\forall x \in [0\,,\,2]$

3) من أجل $n=0$ لدينا : $0 \leq u_0 \leq 2$

لنفترض أن : $0 \leq u_n \leq 2$

بما أن : $f(x) \in [0\,,\,2]$ ، $\forall x \in [0\,,\,2]$

فإن : $0 \leq f(u_n) \leq 2$

أي : $0 \leq u_{n+1} \leq 2$

ومنه : $0 \leq u_n \leq 2$ ، $\forall x \in [0\,,\,2]$

إذن : (u_n) مكبـورة.

4) لدينا : $f(x) \in [0\,,\,2]$ ، $\forall x \in [0\,,\,2]$

و : $f(x) \geq x$

وبما أن : $u_n \in [0\,,\,2]$ ، $\forall n \in \mathbb{N}$

فإن : $f(u_n) \geq u_n$ ، $\forall n \in \mathbb{N}$

ومنه : $u_{n+1} \geq u_n$

إذن : (u_n) تزايديــة.

5) بما أن : (u_n) تزايديــة ومكبورة .

فإنها متقاربــة.

ونهايتها هــي حـل المعادلـة :

$f(x) = x$ ، $x \in [0\,,\,2]$

لدينا : $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + 1 = x$

$\Leftrightarrow \quad x = 2$

وبما أن : $2 \in [0 , 2]$

فإن : $\lim u_n = 2$

تمرين تطبيقي :

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \; ; \quad u_{n+1} = \dfrac{2 \cdot u_n + 3}{u_n + 2} \end{cases}$$

1) أدرس تغيرات الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x + 2}$

ثم أنشئ (ℓ_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم ، ثم انشئ الحدود الأولى للمتتالية (u_n).

2) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \quad -1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

3) استنتج رتابة (u_n) ، ثم أن (u_n) متقاربة.

4) حدد نهاية (u_n).